УДК 517.518.86

М. В. Дейкалова

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ НА МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ*

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, есть евклидово пространство со скалярным произведением

$$xy = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k, \; x = (x_1, \ldots, x_m), \; y = (y_1, \ldots, y_m),$$

и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. Выделим в пространстве $\mathbb{R}^m$ единичный шар и единичную сферу:

$$\mathbb{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \; |x| \leqslant 1\}, \quad \mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \; |x| = 1\}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_{n,m}$ множество алгебраических многочленов

$$P_n(x) = \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_m \leqslant n \\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{Z}_+^m}} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

степени (не выше) n от m (вещественных) переменных с вещественными коэффициентами c_α. Пусть $\mathcal{P}_{n,m}^0$ есть подпространство многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} P_n(x)\, dx = 0, \tag{1}$$

т. е. имеющих нулевое среднее значение на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$. Для многочлена $P \in \mathcal{P}_{n,m}^0$ рассмотрим множество его неотрицательных значений

$$E^+(P) = \{x \in \mathbb{S}^{m-1} : \; P(x) \geqslant 0\}$$

на сфере и (($m-1$)-мерную поверхностную, классическую) меру

$$\mu(P) = \mu(P, \mathbb{S}^{m-1}) = |E^+(P)|$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05-01-00233.

© М. В. Дейкалова, 2006

этого множества. В данной работе нас интересует задача нахождения величины

$$\tau(n,m) = \inf\{\mu(P):\ P \in \mathcal{P}^0_{n,m}\} \tag{2}$$

наименьшей меры множества неотрицательности алгебраических многочленов с нулевым средним значением на многомерной сфере.

Будем рассматривать также аналогичную (2) задачу на множестве $\mathcal{Z}_{n,m}$ зональных многочленов. Многочлен $P \in \mathcal{P}_{n,m}$ называется *зональным*, если найдется точка y на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ и многочлен одной переменной $g \in \mathcal{P}_{n,1}$ такие, что $P(x) = g(xy)$ при всех $x \in \mathbb{S}^{m-1}$. Рассмотрим подмножество зональных многочленов с нулевым средним значением на сфере $\mathcal{Z}^0_{n,m} = \mathcal{Z}_{n,m} \cap \mathcal{P}^0_{n,m}$. Задача состоит в нахождении величины

$$z(n,m) = \inf\{\mu(P):\ P \in \mathcal{Z}^0_{n,m}\}; \tag{3}$$

очевидно,

$$\tau(n,m) \leqslant z(n,m). \tag{4}$$

Впервые задачу типа (2) для тригонометрических полиномов поставил Л. В. Тайков в 1963 г. в докладе на семинаре С. Б. Стечкина в Свердловском отделении математического института им. В. А. Стеклова РАН в связи с исследованием некоторых экстремальных задач, опубликованных в последующем в [1] и [2]. Обозначим через $\mathcal{T}_n$ множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами. Пусть $\mathcal{T}^0_n$ есть множество полиномов $f_n \in \mathcal{T}_n$, имеющих нулевое среднее значение на периоде:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\, dt = 0.$$

Для полинома $f_n \in \mathcal{T}^0_n$ рассмотрим меру его множества неотрицательности

$$\mu(f_n) = \mu(f_n, \mathbb{T}) = \operatorname{mes}\{t \in [-\pi,\pi]:\ f_n(t) \geqslant 0\}.$$

Задача Тайкова состоит в вычислении наименьшего значения этой меры

$$\tau(n) = \inf\{\mu(f_n):\ f_n \in \mathcal{T}^0_n\}. \tag{5}$$

Эту задачу решил А. Г. Бабенко в 1984 г.; а именно, он доказал [3], что

$$\tau(n) = \frac{2\pi}{n+1}$$

и экстремальным является полином

$$f_n^*(t) = \frac{\left(\cos\dfrac{n+1}{2}\,t\right)^2}{\cos t - \cos\dfrac{\pi}{n+1}}. \tag{6}$$

При $m = 2$ сфера $\mathbb{S}^1$ есть единичная окружность плоскости и $\tau(n, 2)$ совпадает с $\tau(n)$. Таким образом, $\tau(n, 2) = \tau(n) = 2\pi/(n+1)$. Решение задачи (2) при других значениях m неизвестно.

Точное значение $z(n, m)$ (для всех n) известно лишь при $m = 2$ и $m = 3$. При $m = 2$ величины $z(n, 2)$ и $\tau(n, 2)$ совпадают, поскольку экстремальный полином (6) в задаче (5) является четным. Решение задачи (3) при $m = 3$ может быть получено с помощью результата В. В. Арестова и В. Ю. Раевской [4] для алгебраических многочленов одной переменной на отрезке $[-1, 1]$. Основным результатом данной работы является следующее утверждение (оно было анонсировано автором ранее в [5]).

Теорема. *При $m \geqslant 3$ существуют положительные константы A_m и B_m такие, что при всех $n \geqslant 1$ выполняются неравенства*

$$\frac{A_m}{n^{m-1}} \leqslant \tau(n, m) \leqslant z(n, m) \leqslant \frac{B_m}{n^{m-1}}. \tag{7}$$

Ниже в леммах 3.3 и 2.1 будут приведены более информативные оценки, в частности будут выписаны конкретные значения величин A_m и B_m.

Сделаем несколько замечаний относительно рассматриваемых в данной работе интегралов по следующим множествам: шар $\mathbb{B}^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leqslant r\}$ радиуса r с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$, сфера $\mathbb{S}^{m-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : \ |x| = r\}$ радиуса r пространства или, более обще, шар $\mathbb{B}^k(r)$ и сфера $\mathbb{S}^{k-1}(r)$ некоторого линейного подпространства размерности k, $2 \leqslant k \leqslant m$, в частности единичный шар $\mathbb{B}^m = \mathbb{B}^m(1)$ и единичная сфера $\mathbb{S}^{m-1} = \mathbb{S}^{m-1}(1)$. На каждом из этих множеств $\mathbb{H}$ рассматривается классическая мера Лебега (соответствующей размерности). Для измеримого подмножества $E \subset \mathbb{H}$ символом $|E|$ условимся обозначать (соответствующую) меру множества E. Пусть $L(E)$ есть пространство функций, измеримых и суммируемых на E; для функции $f \in L(E)$ ее интеграл (Лебега) по множеству E будет записываться в виде $\displaystyle\int_E f(x)\,dx$. Впрочем, ниже в большинстве случаев интегралы можно понимать в римановском смысле (относительно соответствующей меры Жордана).

2. Оценка сверху

В этом параграфе будет получена оценка сверху величины (3), а как следствие и (2) при $m \geqslant 3$. В наших рассуждениях несколько раз будут использованы известные формулы (см., например, [6, гл. XVIII, § 5, п. 676]):

$$|\mathbb{B}^m(r)| = |\mathbb{B}^m| r^m, \quad |\mathbb{B}^m| = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}, \tag{8}$$

$$|\mathbb{S}^{m-1}| = m|\mathbb{B}^m| = \frac{m\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}, \tag{9}$$

где Γ есть гамма-функция Эйлера.

Нам будет удобно разбить доказательство на несколько пунктов.

2.1. С помощью функции $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и ненулевой точки $y \in \mathbb{R}^m$ определим функцию $\Phi(x) = g(xy)$, отображающую $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$; ее называют *функцией плоской волны* или *зональной функцией*. Пусть e_y – единичный вектор, лежащий на луче, выходящем из начала координат в направлении y; тогда $y = |y|e_y$. Для вещественного числа p обозначим через $\Pi(p)$ гиперплоскость точек $x \in \mathbb{R}^m$ со свойством $xe_y = p$. Для точек x из гиперплоскости $\Pi(p)$ имеем $xy = |y| \cdot xe_y = |y|p$; как следствие, $\Phi(x) = g(xy) = g(|y|p)$, т. е. функция Φ имеет на гиперплоскости постоянное значение.

При соответствующих предположениях относительно функции g справедлива формула

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} g(xy)\,dx = |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^{1} (1-p^2)^{\frac{m-3}{2}} g(|y|p)\,dp, \quad y \neq 0. \tag{10}$$

Эта формула хорошо известна, однако для полноты изложения она будет здесь обоснована в предположении, что функция g на каждом (конечном) отрезке вещественной оси ограничена и имеет конечное число точек разрыва. В этих условиях оба интеграла в (10) существуют.

При сделанных предположениях для любого $r > 0$ существует интеграл

$$G(r) = \int_{\mathbb{B}^m_r} g(xy)\,dx, \quad r > 0. \tag{11}$$

Преобразуем его. При $p \in [-r, r]$ сечение шара $\mathbb{B}^m_r$ гиперплоскостью $\Pi(p)$ дает шар $\mathbb{B}^{m-1}(a)$ радиуса $a = \sqrt{r^2 - p^2}$ с центром в точке $p\dfrac{y}{|y|}$. Поэтому имеем

$$G(r) = \int_{-r}^{r} |\mathbb{B}^{m-1}(a)|\, g(|y|p)\,dp.$$

Применив к $|\mathbb{B}^{m-1}(a)|$ формулу (8), получаем

$$G(r)=|\mathbb{B}^{m-1}|\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-p^2}\right)^{m-1}g(|y|p)\,dp. \tag{12}$$

Дифференцируя последнее представление, находим

$$G'(r)=r(m-1)|\mathbb{B}^{m-1}|\int_{-r}^{r}(r^2-p^2)^{\frac{m-3}{2}}g(|y|p)\,dp.$$

Сделав замену $p=rp',\ p'\in[-1,1]$, получаем наконец формулу

$$G'(r)=r^{m-1}(m-1)|\mathbb{B}^{m-1}|\int_{-1}^{1}(1-p^2)^{\frac{m-3}{2}}g(r|y|p)\,dp. \tag{13}$$

С другой стороны, используя, к примеру, полярную замену переменных (см. [6, гл. XVIII, § 5, п. 676]), интеграл (11) можно представить в виде

$$G(r)=\int_0^r t^{m-1}\Psi(t)dt, \quad \Psi(t)=\int_{\mathbb{S}^{m-1}}g(t\cdot xy)\,dx. \tag{14}$$

Дифференцируя это соотношение, получаем

$$G'(r)=r^{m-1}\Psi(r)=r^{m-1}\int_{\mathbb{S}^{m-1}}g(r\cdot xy)\,dx. \tag{15}$$

Приравнивая правые части представлений (13) и (15), получаем соотношение

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}}g(r\cdot xy)\,dx=(m-1)|\mathbb{B}^{m-1}|\int_{-1}^{1}(1-p^2)^{\frac{m-3}{2}}g(r|y|p)\,dp. \tag{16}$$

При $r=1$ для функции $g\equiv 1$ соотношения (11) и (14) дают хорошо известную формулу (9). В силу этой формулы соотношение (16) можно записать в виде

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}}g(r\cdot xy)\,dx=|\mathbb{S}^{m-2}|\int_{-1}^{1}(1-p^2)^{\frac{m-3}{2}}g(r|y|p)\,dp. \tag{17}$$

Полагая здесь $r=1$, приходим к (10).

2.2. Переформулируем задачу (3) в виде соответствующей экстремальной задачи на множестве $\mathcal{P}_n=\mathcal{P}_{n,1}$ многочленов одного переменного. Пусть $g_n\in\mathcal{P}_n$, $y\in\mathbb{S}^{m-1}$ и $P_n(x)=g_n(xy)$ – соответствующий зональный многочлен на сфере. В силу (10) имеет место формула

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}}P_n(x)\,dx=|\mathbb{S}^{m-2}|\int_{-1}^{1}(1-p^2)^{\frac{m-3}{2}}g_n(p)\,dp. \tag{18}$$

В данной ситуации условие (1) принимает вид

$$\int_{-1}^{1}(1-p^2)^{\frac{m-3}{2}}g_n(p)\,dp=0; \tag{19}$$

а это означает, что многочлен g_n на отрезке $\mathbb{I}=[-1,1]$ ортогонален функции

$$\phi(p)=(1-p^2)^{\alpha},\quad \alpha=\alpha(m)=\frac{m-3}{2}. \tag{20}$$

Множество многочленов $g_n\in\mathcal{P}_n$ со свойством (19) обозначим через $\mathcal{P}_n^0(\phi)$.

Выразим меру $\mu(P_n)=\mu(P_n,\mathbb{S}^{m-1})=|E^+(P_n)|$ множества неотрицательности $E^+(P_n)=\{x\in\mathbb{S}^{m-1}:\ P_n(x)\geqslant 0\}$ многочлена P_n в терминах многочлена g_n. Положим $e(g_n)=\{t\in\mathbb{I}:\ g_n(t)\geqslant 0\}$. Характеристическая функция $\chi=\chi_{e(g_n)}$ множества $e(g_n)$ (на отрезке) и характеристическая функция $X=\chi_{E(P_n)}$ множества $E(P_n)$ (на сфере) связаны соотношением $X(x)=\chi(xy)$. Применяя к этой паре функций формулу (10), получаем соотношение

$$\mu(P_n)=|\mathbb{S}^{m-2}|\int_{e(g_n)}(1-t^2)^{\alpha}dt. \tag{21}$$

Положим

$$\zeta(n,\phi)=\inf\left\{\int_{e(g_n)}\phi(t)\,dt:\ g_n\in\mathcal{P}_n^0(\phi)\right\}. \tag{22}$$

В силу соотношения (21) задачи (3) и (22) связаны равенством

$$z(n,m)=|\mathbb{S}^{m-2}|\zeta(n,\phi), \tag{23}$$

где вес ϕ определен формулой (20).

2.3. Оценим величину (22) сверху. Это будет сделано с помощью конкретного многочлена, конструкция которого восходит к С. Н. Бернштейну (см., например, [7, с. 28; 4] и приведенные там ссылки). Обозначим через $q_k=q_k^{\alpha}$, $0\leqslant k<\infty$, систему многочленов Гегенбаура, ортогональных на отрезке $\mathbb{I}=[-1,1]$ с весом (20). Пусть $t_k=t_k(\alpha)$ – наибольший нуль многочлена $q_k=q_k^{\alpha}$. Определим многочлен

$$R_{2k-1}(t)=\frac{q_k^2(t)}{t-t_k} \tag{24}$$

нечетной степени $n=2k-1$. Этот многочлен удовлетворяет условию (19) (см., например, [8, с. 201; 7, с. 28]), т. е. $R_n\in\mathcal{P}_n^0(\phi)$, $n=2k-1$. Следовательно, имеет место оценка

$$\zeta(2k-1,\phi)\leqslant\mathcal{C}(k), \tag{25}$$

где

$$\mathcal{C}(k) = \mathcal{C}(k,m) = \int_{e(R_{2k-1})} \phi(t)dt = \int_{t_k}^{1} (1-t^2)^{\alpha} dt, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}. \tag{26}$$

В последнем интеграле сделаем замену $t = \cos\theta,\ \theta \in [0, \theta_k]$, где $\theta_k = \theta_k(\alpha) = \arccos t_k$. В результате получаем представление

$$\mathcal{C}(k) = \int_0^{\theta_k} (\sin\theta)^{m-2}\, d\theta, \tag{27}$$

а это дает оценку

$$\mathcal{C}(k) < \frac{\theta_k^{m-1}}{m-1}. \tag{28}$$

Известно (см., например, [9, теорема 8.1.2]), что

$$\lim_{k\to\infty} k\theta_k(\alpha) = j(\alpha), \tag{29}$$

где $j(\alpha)$ есть первый положительный нуль функции Бесселя

$$J_\alpha(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2\nu}}{\nu!\Gamma(\nu+\alpha+1)}$$

первого рода порядка α. Отметим, что для $j(\alpha)$ имеет место [10] оценка

$$j(\alpha) < \sqrt{\alpha+1}\left(\sqrt{\alpha+2}+1\right), \quad \alpha > -1. \tag{30}$$

Введем обозначение

$$\eta(\alpha) = \sup\{k\theta_k(\alpha):\ k \geqslant 1\}; \tag{31}$$

в силу (29) эта величина конечная при каждом m. Неравенство (28) влечет теперь оценку

$$\mathcal{C}(k) < \frac{(\eta(\alpha))^{m-1}}{(m-1)k^{m-1}}, \quad k \geqslant 1. \tag{32}$$

Для $n \geqslant 1$ положим $k = \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$. Тогда либо $n = 2k$, либо $n = 2k-1$. Имеем цепочку неравенств

$$\zeta(2k,\phi) \leqslant \zeta(2k-1,\phi) < \frac{(2\eta(\alpha))^{m-1}}{(m-1)(2k)^{m-1}} < \frac{(2\eta(\alpha))^{m-1}}{(m-1)(2k-1)^{m-1}}.$$

Следовательно, при любом $n \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\zeta(n,\phi) \leqslant \mathcal{C}(k,m) < \frac{(2\eta(\alpha))^{m-1}}{(m-1)\, n^{m-1}}. \tag{33}$$

В силу (29) существует номер $k(m)$ такой, что при $k \geqslant k(m)$ выполняется неравенство

$$k\theta_k \leqslant j(\alpha)\left(1 + \frac{1}{m-1}\right);$$

при таких k имеем

$$\mathcal{C}(k) < \frac{j_\alpha^{m-1}}{(m-1)k^{m-1}}\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} < \frac{e(j(\alpha))^{m-1}}{(m-1)k^{m-1}}.$$

Отсюда заключаем, что при любом $m \geqslant 3$ для каждого $n \geqslant n(m) = 2k(m)$ выполняется неравенство

$$\zeta(n,\phi) < \frac{e(2j(\alpha))^{m-1}}{(m-1)n^{m-1}}. \tag{34}$$

Равенство (23) и неравенства (28), (33), (34) дают такое утверждение.

Лемма 2.1. *При $n \geqslant 1,\ m \geqslant 3$ имеет место неравенство*

$$z(n,m) \leqslant \mathcal{B}_m(n), \tag{35}$$

в котором

$$\mathcal{B}_m(n) = |\mathbb{S}^{m-2}| \int_0^{\theta_k(\alpha)} (\sin t)^{m-2}\,dt, \quad k = \left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{36}$$

Для последней величины справедливы оценки

$$\mathcal{B}_m(n) < \frac{B_m}{n^{m-1}}, \quad B_m = |\mathbb{S}^{m-2}|\ \frac{(2\eta(\alpha))^{m-1}}{m-1}, \quad n \geqslant 1; \tag{37}$$

$$\mathcal{B}_m(n) < \frac{\overline{B}_m}{n^{m-1}}, \quad \overline{B}_m = |\mathbb{S}^{m-2}|\ \frac{e(2j(\alpha))^{m-1}}{m-1}, \quad n \geqslant n(m). \tag{38}$$

Лемма 2.1 содержит оценку сверху в (7).

3. Оценка снизу

В работе С. Б. Стечкина [11] содержится следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Предположим, что f есть тригонометрический полином порядка n, $\bar{t}$ – точка, в которой достигается его чебышевская норма $L = ||f|| = ||f||_{C_{2\pi}}$, и при этом $f(\bar{t}) > 0$, так что $L = ||f|| = f(\bar{t})$. Тогда*

$$f(\bar{t} + t) \geqslant L\cos nt, \quad |t| \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

Переформулируем эту лемму для алгебраических многочленов на сфере.

Лемма 3.2. *Предположим, что P есть алгебраический многочлен порядка n (от m переменных), $x_0 \in \mathbb{S}^{m-1}$ – точка, в которой достигается его чебышевская норма $L = \|P\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})}$, и при этом $P(x_0) > 0$, так что $L = P(x_0)$. Тогда*

$$P(x) \geqslant L \cos nt, \tag{39}$$

$$|t| \leqslant \frac{\pi}{n}, \quad xx_0 = \cos t. \tag{40}$$

Доказательство. Это утверждение следует из леммы Стечкина. Действительно, зафиксируем точку $x \in \mathbb{S}^{m-1}$, $x \neq x_0$, со свойством (40). Обозначим через Π двумерную плоскость, проходящую через точки x, x_0 (и начало координат пространства). Сечение сферы $\mathbb{S}^{m-1}$ плоскостью Π есть (плоская) окружность S. Будем рассматривать в плоскости Π полярную систему координат, полярный луч которой совпадает с направлением вектора x_0. Полярный угол t точки x определяется соотношением $xx_0 = \cos t$. Сужение многочлена P на окружность S является тригонометрическим полиномом порядка n (переменного t). Применяя к этому полиному лемму Стечкина 3.1, получаем утверждение леммы 3.2.

Напомним обозначения:

$$E^+(P) = \{x \in \mathbb{S}^{m-1} :\ P(x) \geqslant 0\}, \quad \mu(P) = \mu(P, \mathbb{S}^{m-1}) = |E^+(P)|.$$

Лемма 3.3. *При $n \geqslant 1$, $m \geqslant 3$ для любого многочлена $P \in \mathcal{P}^0_{n,m}$ имеет место неравенство*

$$\mu(P) \geqslant \mathcal{A}_m(n), \tag{41}$$

в котором

$$\mathcal{A}_m(n) = |\mathbb{S}^{m-2}| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\sin t)^{m-2} \cos nt \, dt; \tag{42}$$

для последней величины справедлива оценка

$$\mathcal{A}_m(n) \geqslant \frac{A_m}{n^{m-1}}, \quad A_m = \frac{\pi \ |\mathbb{S}^{m-2}|}{2m(m-1)}. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть $P \not\equiv 0$ есть многочлен из $\mathcal{P}^0_{n,m}$ и x_0 – точка сферы, в которой достигается его чебышевская норма: $\|P\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})} = |P(x_0)|$. Предположим сначала, что $P(x_0) > 0$. Рассмотрим множество

$$E_n(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{S}^{m-1} :\ xx_0 = \cos t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n} \right] \right\};$$

на этом множестве выполняется условие $\cos nt \geqslant 0$. А отсюда в силу леммы 3.2 следует вложение $E_n(x_0) \subset E^+(P)$. Поэтому имеем

$$\mu(P) \geqslant |E_n(x_0)| = \int_{E_n(x_0)} dx = \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \chi(x)\, dx; \tag{44}$$

здесь χ есть характеристическая функция множества $E_n(x_0)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_n(x_0), \\ 0, & x \notin E_n(x_0). \end{cases}$$

Эта функция является зональной; более того, $\chi(x) = g_n(xy)$, где функция $g_n(p)$, $p \in [-1,1]$, обладает тем свойством, что $p_n(t) = g_n(\cos t)$ есть характеристическая функция отрезка $I_n = \left[-\dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{\pi}{2n}\right]$. Следовательно, к последнему интегралу из (44) можно применить формулу (10); в результате получаем

$$\begin{aligned} \mu(P) &\geqslant |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^{1} (1-p^2)^{\frac{m-3}{2}} g_n(p)\, dp = \\ &= |\mathbb{S}^{m-2}| \int_0^{\pi} (\sin t)^{m-2} p_n(t)\, dt = \\ &= |\mathbb{S}^{m-2}| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\sin t)^{m-2}\, dt. \end{aligned}$$

Итак, справедлива оценка

$$\mu(P) \geqslant \mathcal{A}_m^{(1)}(n), \tag{45}$$

в которой

$$\mathcal{A}_m^{(1)}(n) = |\mathbb{S}^{m-2}| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\sin t)^{m-2} dt. \tag{46}$$

Предположим теперь, что $P(x_0) < 0$. Введем следующее обозначение:

$$E^-(P) = \{x \in \mathbb{S}^{m-1} :\ P(x) < 0\}.$$

В силу условия (1)

$$\int_{E^+(P)} P(x)\, dx = \int_{E^-(P)} (-P(x))\, dx.$$

По лемме 3.2

$$-P(x) \geqslant L \cos nt, \quad |t| \leqslant \frac{\pi}{n}, \quad xx_0 = \cos t.$$

Определим на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ (зональную) функцию C_n

$$C_n(x) = \cos nt \text{ для } \ |t| \leqslant \frac{\pi}{2n}, \quad C_n(x) = 0, \text{ для } |t| > \frac{\pi}{2n};$$

здесь $xx_0 = \cos t$. Имеем

$$\begin{aligned}\int_{E^+(P)} P(x)\,dx = \int_{E^-(P)} (-P(x))dx \geqslant L \int_{\mathbb{S}^{m-1}} C_n(x)\,dx = \\ = L|\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^{1} (1-p^2)^{\frac{m-3}{2}} C_n(p)\,dp = \\ = L|\mathbb{S}^{m-2}| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\sin t)^{m-2} \cos nt\,dt = L\mathcal{A}_m^{(2)}(n),\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_m^{(2)}(n) = |\mathbb{S}^{m-2}| \ \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\sin t)^{m-2} \cos nt\,dt. \tag{47}$$

С другой стороны,

$$\int_{E^+(P)} P(x)\,dx \leqslant L \operatorname{mes} E^+(P).$$

Отсюда следует оценка

$$\mu(P) = \operatorname{mes} E^+(P) \geqslant \mathcal{A}_m^{(2)}(n). \tag{48}$$

Сравнивая (46) и (47), видим, что $\mathcal{A}_m^{(1)}(n) \geqslant \mathcal{A}_m^{(2)}(n)$. Таким образом, неравенство (48) выполняется в обоих случаях, независимо от знака числа $P(x_0)$. Тем самым неравенство (41) с константой (42) доказано.

Оценим величину $\mathcal{A}_m(n) = \mathcal{A}_m^{(2)}(n)$ снизу. Для этого оценим снизу интеграл

$$i(m,n) = n^{m-1} \ \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\sin t)^{m-2} \cos nt \ dt. \tag{49}$$

Функция $\sin$ на отрезке $[0,\pi]$ выпуклая вверх, поэтому справедливо неравенство

$$\sin t \geqslant t \left(\frac{\sin \dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}} \right), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right].$$

Применяя это неравенство, получаем

$$i(m,n) \geqslant n^{m-1} \ \left(\frac{\sin \dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}} \right)^{m-2} \ \int_0^{\frac{\pi}{2n}} t^{m-2} \cos nt \ dt \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}}\right)^{m-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{m-2}\cos t\,dt.$$

Функция $\dfrac{\sin t}{t}$ убывает на $[0,\pi]$, и, кроме того,

$$\cos t \geqslant \frac{\pi-2t}{\pi}, \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

поэтому

$$i(m,n) \geqslant \left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}\right)^{m-2} \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{m-2}(\pi-2t)\,dt = \frac{\pi}{2m(m-1)}. \qquad (50)$$

Соотношения (42), (49) и (50) дают оценку (43). Лемма доказана.

В силу леммы 3.3 для любых $m\geqslant 3$, $n\geqslant 1$ имеет место оценка снизу в (7) с константой

$$A_m = \frac{\pi\,|\mathbb{S}^{m-2}|}{2m(m-1)}.$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

Литература

1. Тайков Л. В. Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи матем. наук. 1965. Т. 20, № 3. С. 205–211.

2. Тайков Л. В. О наилучшем приближении ядер Дирихле // Там же. 1993. Т. 53, № 6. С. 116–121.

3. Бабенко А. Г. Об одной экстремальной задаче для полиномов // Матем. заметки. 1984. Т. 35, № 3. С. 349–356.

4. Арестов В. В., Раевская В. Ю. Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на отрезке // Там же. 1997. Т. 62, № 3. С. 332–342.

5. Дейкалова М. В. Задача Тайкова для алгебраических многочленов на многомерной сфере // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. конф., Екатеринбург, 2–6 февр. 2004 г. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004. С. 42–43.

6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. СПб.: Изд-во «Лань», 1997. Т. 3.

7. Бабенко А. Г. Экстремальные свойства полиномов и точные оценки среднеквадратичных приближений: Днс. … канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1987.

8. Бернштейн С. Н. О формулах квадратур Котеса и Чебышева // Собр. соч.: В 4 т. М., 1954. Т. 2. С. 200–204.

9. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962.

10. Chambers Ll. G. An upper bound for the first zero of Bessel functions // Mathematics of Computation. 1982. Vol. 38, № 158. P. 589–591.

11. Стечкин С. Б. Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Избр. тр. Математика. М.: Наука; Физматлит, 1998. С. 15–18 (Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1511–1514).